Politechnika Warszawska
Wydział Fizyki
Laboratorium Fizyki II p.
Małgorzata Igalson

Ćwiczenie nr 12

WYZNACZANIE PARAMETRÓW MIKROSKOPOWYCH PÓŁPRZEWODNIKÓW W OPARCIU O ZJAWISKO HALLA.

1. Prąd elektryczny w półprzewodnikach.

Przepływ prądu elektrycznego w metalach i półprzewodnikach jest związany z istnieniem swobodnych nośników prądu – elektronów w metalach, a elektronów i dziur w półprzewodnikach. Gęstość prądu zależy od koncentracji tych nośników *n* i prędkości, z jaką się poruszają, zwaną prędkością dryfu v_D

$$\vec{\mathbf{j}} = \mathbf{en}\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{D}}$$

e – ładunek elektronu.

Swobodne nośniki zachowują się podobnie jak cząsteczki gazu – poruszają się chaotycznie w różnych kierunkach z dużymi prędkościami (rzędu 10^5 – 10^6m/s). Jeśli do próbki przyłożone jest pole elektryczne, nośniki prądu uzyskują składową prędkości w kierunku pola: średnio przesuwają się one – „dryfują” – w tym kierunku.

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{D}} = \mu\vec{\mathbf{E}}$$

Tę średnią stałą prędkość nazywamy właśnie prędkością dryfu $\mathbf{v_D}$. Zależy ona liniowo od natężenia pola elektrycznego:

Stała proporcjonalności μ zwana ruchliwością jest wielkością charakterystyczną dla danego materiału.

Wyrażenie na gęstość prądu można zapisać w formie znanej jako mikroskopowa postać prawa Ohma:

$$\vec{\mathbf{j}} = \sigma\vec{\mathbf{E}}$$

gdzie σ to przewodność właściwa materiału (odwrotność oporności właściwej):

$$\sigma = \mathbf{ne}\mu$$

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że mikroskopowe prawo Ohma to jest po prostu inaczej zapisane dobrze nam znane prawo opisujące proporcjonalność prądu do przyłożonego napięcia.

W przypadku, gdy elektrony i dziury biorą udział w przenoszeniu prądu, we wzorze na przewodność należy uwzględnić wkład pochodzący od obu rodzajów nośników:

$$\sigma = e(n\mu_e + p\mu_d)$$

n i μ_e to koncentracja i ruchliwość elektronów, a **p** i μ_d - koncentracja i ruchliwość dziur.

Typowe wartości ruchliwości w półprzewodnikach wynoszą 10 – 1000 cm^2/Vs. Łatwo obliczyć, że przeciętnych warunkach (próbka o długości 1 mm, do której przyłożono napięcie rzędu 10V) prędkość dryfu nie przekracza 10^3 m/s. W porównaniu ze średnią prędkością termiczną nośników prądu (wynoszącą jak już wspomniano 10^5 – 10^6 m/s) jest więc niewielka. Możemy zatem wyobrażać sobie zachowanie się swobodnych nośników w krysztale po przyłożeniu pola elektrycznego jako szybki chaotyczny ruch od zderzenia do zderzenia z jednoczesnym względnie powolnym przesuwaniem się wszystkich nośników w kierunku określonym przez wektor natężenia pola elektrycznego. Ruchliwość, czyli parametr, który mówi, do jakiego stopnia „chętnie” nośniki dryfują w polu elektrycznym, zależy od ilości i rodzaju przeszkód, które napotykają one na swej drodze – tzw centrów rozpraszania. W idealnej nieskończenie dużej sieci periodycznej elektrony poruszałyby się jak w pustej przestrzeni, nie „zauważając” istnienia tej sieci. Fakt ten jest konsekwencją falowej natury elektronu. W realnej sieci krystalicznej atomy drgają termicznie wokół położeń równowagi, występują defekty strukturalne i domieszki. Wszystko to stanowi odstępstwo od idealnej periodyczności. Nośniki poruszając się po krysztale zderzają się z napotkanymi po drodze niedoskonałościami sieci. Nazywamy to rozpraszaniem nośników. W zależności od temperatury, rodzaju defektów, stopnia domieszkowania itp. możemy mówić o dominacji jakiegoś mechanizmu rozpraszania. Na przykład w wysokich temperaturach dla niezbyt silnie domieszkowanych półprzewodników dominuje rozpraszanie na drganiach sieci. W niskich temperaturach, gdy drgania cieplne sieci stają się mniej intensywne, nośniki rozpraszają się przede wszystkim na defektach strukturalnych i domieszkach.

Dominujący mechanizm rozpraszania ma wpływ m.in. na zależność ruchliwości od temperatury. Na przykład w wysokich temperaturach (rozpraszanie na drganiach sieci) $\mu \sim T^{-\frac{3}{2}}$, a w niskich temperaturach przy rozpraszaniu na zjonizowanych domieszkach $\mu \sim T^{\frac{3}{2}}$.

2. Zjawisko Halla.

Wielkości, które określają przewodnictwo elektryczne materiału półprzewodnikowego: znak nośników prądu, ich koncentrację i ruchliwość, nazywamy mikroskopowymi parametrami półprzewodnika. Jedną z najpopularniejszych metod ich wyznaczania jest pomiar oparty na zjawisku Halla. Jeśli próbkę wykonaną z metalu lub półprzewodnika, przez którą płynie prąd o natężeniu I (wzdłuż osi $\mathbf{x}$ na rys.1) wywołany zewnętrznym polem elektrycznym $\vec{\mathbf{E}}$ umieścimy w polu magnetycznym o indukcji $\vec{\mathbf{B}}$, skierowanym prostopadle do kierunku płynącego prądu (wzdłuż osi $\mathbf{z}$), to pomiędzy ściankami próbki w kierunku $\mathbf{y}$ zaobserwujemy różnicę potencjałów, zwaną napięciem Halla. Wielkość napięcia Halla jest wprost proporcjonalna do natężenia prądu i indukcji magnetycznej a odwrotnie proporcjonalna do grubości próbki $\mathbf{d}$.

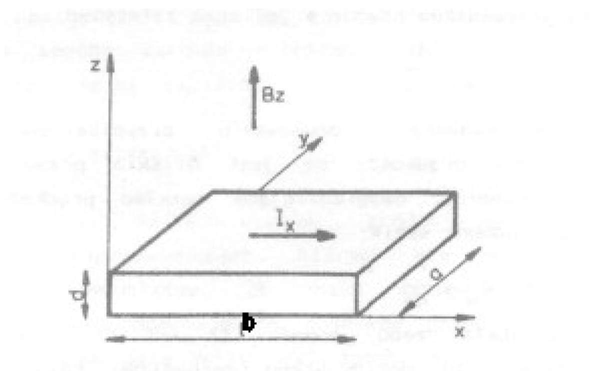
Stałą proporcjonalności nazywamy stałą Halla $\mathbf{R_H}$.

$$\mathbf{U_H = R_H I_d B}$$

Aby wyjaśnić mechanizm powstawania tego napięcia rozpatrzmy najprostszy przypadek próbki, w której występują tylko nośniki jednego znaku (elektrony). W nieobecności pola magnetycznego nośniki te poruszają się zgodnie z kierunkiem zewnętrznego pola elektrycznego z prędkością $\mathbf{v_D}$. Po włączeniu pola magnetycznego zaczyna na nie działać dodatkowa siła:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{e}\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{D}}\mathbf{x}\vec{\mathbf{B}}$$

Widzimy, że siła ta działa wzdłuż osi $\mathbf{y}$ jeśli przyjąć kierunki prądu i pola magnetycznego jak na rys.1. i powoduje zbaczanie nośników z ich toru równoległego do $\mathbf{x}$.



Rys. 1.

Wskutek tego z jednej strony próbki pojawia się nadmiar elektronów, których ładunek nie jest już skompensowany obecnością dodatnich jonów. Nieskompensowany ładunek elektryczny staje się źródłem wewnętrznego pola elektrycznego $\mathbf{E_H}$

skierowanego wzdłuż osi $\mathbf{y}$, przeciwdziałającego dalszemu gromadzeniu się elektronów. W rezultacie ustala się stan równowagi, w którym składowa związana z polem magnetycznym siły Lorentza, działająca na poszczególne elektrony jest dokładnie równoważona przez siłę pochodzącą od tego wewnętrznego pola elektrycznego:

$$\mathbf{e\vec{v}_D x\vec{B} = e\vec{E}_H}$$

Ponieważ $\mathbf{v_D} \perp \mathbf{B}$ można zapisać to równanie skalarnie

$$\mathbf{E_H = v_D B}$$

gdzie $\mathbf{E_H}$ jest skierowane wzdłuż osi $\mathbf{y}$. Ten warunek równowagi sił pozwala obliczyć wielkość różnicy potencjałów między bokami próbki związaną z pojawieniem się wewnętrznego pola elektrycznego, czyli napięcie Halla:

$$\mathbf{U_H = E_H a = v_D B a}$$

Wyraźmy teraz prędkość dryfu przez natężenie prądu $\mathbf{I_x}$:

$$\mathbf{v_D = \frac{j}{ne} = \frac{I_x}{nead}}$$

A więc

$$\mathbf{U_H = \frac{1}{ne}\frac{I_x B}{d}}$$

Porównując to wyrażenie ze wzorem empirycznym widzimy, że stała Halla jest wielkością odwrotnie proporcjonalną do koncentracji nośników prądu, a jej znak zależy od ich znaku:

$$\mathbf{R_H = \frac{1}{ne}}$$

W przeprowadzonym rozumowaniu przypisaliśmy wszystkim nośnikom jedną prędkość, co jest bliskie prawdy tylko dla metali. Obliczenia, uwzględniające rozkład prędkości nośników dają bardzo podobny wynik:

$$\mathbf{R_H = \frac{r}{ne}}$$

$\mathbf{r}$ – jest tu stałą rzędu jedności (1< $\mathbf{r}$ < 2), której dokładna wartość zależy od dominującego mechanizmu rozpraszania. Dla przykładu, jeśli nośniki rozpraszają się głównie na drganiach sieci, to $\mathbf{r = \frac{3\pi}{8}}$; gdy dominuje rozpraszanie na zjonizowanych domieszkach, $\mathbf{r}$ = 1,93.

Warto jeszcze wspomnieć, że powyższe zależności obowiązują tylko w słabych polach magnetycznych, przy czym określenie „słabe pole” należy rozumieć jako pole, które powoduje niewielkie zakrzywienie toru elektronu w czasie pomiędzy kolejnymi zderzeniami. Wynika stąd warunek, że pole jest słabe, jeśli spełniona jest nierówność

$$\mu B << 1$$

W przedstawionych rachunkach zajmowaliśmy się przypadkiem, kiedy w transporcie dominują nośniki jednego znaku. Jeśli w półprzewodniku występują elektrony i dziury w porównywalnych koncentracjach, otrzymujemy na stałą Halla bardziej skomplikowane wyrażenie:

$$R_H = \frac{n\mu_e^2 - p\mu_d^2}{e(n\mu_e + p\mu_d)^2}$$

Widzimy, że jednoczesne występowanie dziur i elektronów prowadzi do częściowego, a w szczególnych przypadkach (gdy $n\mu_e^2 = p\mu_d^2$) do całkowitego zniesienia efektu. Pola elektryczne wytwarzane przez gromadzące się dziury i elektrony kompensują się bowiem wzajemnie (zauważmy, że siła związana z polem magnetycznym spycha zarówno elektrony jak i dziury w tym samym kierunku, gdyż dziury i elektrony różnią się nie tylko znakiem, ale także kierunkiem prędkości dryfu).

3. Zastosowanie zjawiska Halla.

Pomiar efektu Halla stanowi źródło bardzo ważnych informacji o półprzewodnikach, których nie może dostarczyć sam pomiar przewodnictwa. Ze znaku napięcia Halla można wnioskować o znaku dominujących nośników prądu. Jeśli są to elektrony, kierunek pola Halla jest zgodny z osią y na rys.1, a jeśli dziury – przeciwny. Wyznaczywszy stałą Halla, możemy obliczyć koncentrację nośników (z dokładnością do stałej r, jeśli nie znamy mechanizmu rozpraszania):

$$n = \frac{1}{R_H e}$$

Zauważmy, że jeśli jednocześnie zmierzymy przewodność elektryczną materiału, to łatwo wyznaczyć ruchliwość nośników ponieważ:

$$\mu_H = \frac{\sigma}{ne} = \sigma R_H$$

Obliczoną z dokładnością do stałej rozpraszania r ruchliwość μ_H nazywamy ruchliwością hallowską: jest ona r razy większa w od ruchliwości dryfowej,:

$$\mu_H = r\mu$$

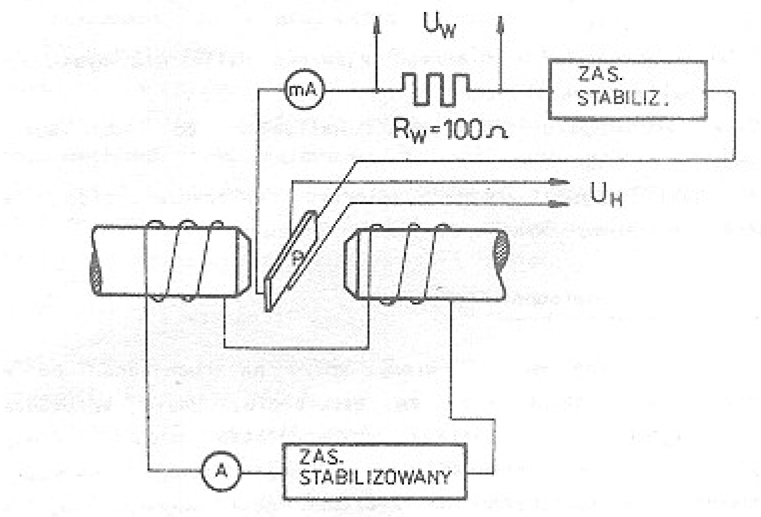
Wykonując pomiary napięcia Halla i przewodności w funkcji temperatury dostajemy zależność temperaturową koncentracji nośników i ruchliwości. Z pierwszej otrzymujemy informacje o stanach domieszkowych w materiale, a z drugiej możemy wnioskować o dominujących mechanizmach rozpraszania. Efekt Halla jest wiec szeroko wykorzystywany w praktyce laboratoryjnej do wyznaczania podstawowych parametrów materiałów półprzewodnikowych.

W oparciu o materiały o dużej ruchliwości wykonuje się hallotrony, które mają wiele zastosowań technicznych. Przede wszystkim służą one jako czujniki w miernikach natężenia pola magnetycznego. Wykorzystuje się je także do konstruowania bardzo czułych kompasów.

Na bazie hallotronów oparte są również amperomierze służące do pomiaru prądów stałych o bardzo dużym natężeniu. Poprzez pomiar natężenia pola magnetycznego w otoczeniu przewodników, w których płynie ten duży prąd, można dokładnie określić jego wartość bez konieczności włączania miernika w obwód.

4. Wykonanie ćwiczenia.

1. Zestawić układ pomiarowy wg. schematu (rys.2.)



Rys. 2.

2. Ustawić prąd płynący przez próbkę na wartości 1,5mA (zasilacz powinien pracować jako stabilizator prądu, a nie napięcia ze względu na występowanie zjawiska magnetoporu) i zmierzyć wartość poprzecznego napięcia w próbce przy wyłączonym polu magnetycznym (napięcie asymetrii). Zastanowić się nad jego źródłem.
3. Wykonać pomiary napięcia Halla w funkcji indukcji magnetycznej (skorzystać z tablicy podającej wartość indukcji w funkcji natężenia prądu płynącego przez cewkę). Wziąć pod uwagę napięcie asymetrii.

Powtórzyć pomiary 2 i 3 dla prądu 3mA.

4. Wyznaczyć opór próbki mierząc spadek napięcia na próbce między elektrodami prądowymi $\mathbf{U_x}$ i spadek napięcia na oporze wzorcowym $\mathbf{U_w}$. Ponieważ oba opory są połączone szeregowo, opór próbki można obliczyć korzystając z proporcji

$$\frac{\mathbf{U_x}}{\mathbf{Rx}} = \frac{\mathbf{U_w}}{\mathbf{R_w}}$$

Obliczyć przewodność właściwą próbki.

5. Wykonać wykres zależności napięcia Halla od $\mathbf{B}$ i obliczyć stałą Halla wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów dla obu prądów sterujących. Ocenić błąd $\mathbf{R_H}$ i sprawdzić, czy obie wartości są takie same z dokładnością do błędu.
6. Korzystając z wyznaczonych wartości przewodności i stałej Halla obliczyć koncentrację i ruchliwość nośników prądu (założyć dominację rozpraszania na drganiach sieci).
7. Określić błąd wyznaczenia $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\mu}$ (najlepiej metodą pochodnej logarytmicznej).
8. Sprawdzić, czy warunek „słabego pola” był spełniony w zakresie pól magnetycznych, dla których przeprowadzono pomiary.

		Napięcie Halla	
		I = [mA]	I= [mA]
I_c[A] Prąd cewki	**B [T]**	$\mathbf{U_H}$ **[V]**	$\mathbf{U_H}$ **[V]**
0			
0.5			
1			
1.5			
2			
2.5			
3			
3.5			
4			
4.5			
5			
5.5			

4a. Opracowanie wyników

1. Wyznaczyć opór hallotronu wraz z niepewnością (typu B) określoną na podstawie niepewności pomiarów napięcia i tolerancji opornika wzorcowego. Znając wymiary geometryczne hallotronu obliczyć przewodność właściwą próbki σ i jej niepewność typu B.
2. Wykonać wykres zależności U_H = f(B). Uwzględnić napięcie asymetrii. Obliczyć i nanieść na wykres niepewności napięcia Halla oraz indukcji pola magnetycznego (na podstawie wykresu $B(I_C)$).
3. Oszacować niepewności pomiarowe U_H oraz B i nanieść je na wykres w postaci odcinków niepewności. Wyliczenia niepewności dokonać na podstawie: danych technicznych dla przyrządów pomiarowych, własnych oszacowań lub wskazówek prowadzącego.
4. Dopasować prostą metodą najmniejszych kwadratów. Ze współczynnika kierunkowego wyznaczyć stałą Halla $R_{H.}$ Obliczyć jej niepewność typu A i B. Podać niepewność całkowitą korzystając w razie potrzeby z prawa propagacji niepewności.
5. Na podstawie wartości σ oraz R_H wyznaczyć koncentrację n oraz ruchliwość nośników prądu μ (zakładając dominację rozpraszania na drganiach sieci) w badanym półprzewodniku. Obliczyć ich (złożone) niepewności standardowe. Zapisać wyniki obliczeń z niepewnościami rozszerzonymi przyjmując współczynnik rozszerzenia równy 2. Dokonać oceny wiarygodności wyznaczonych parametrów porównując ich wartości z danymi literaturowymi dla typowych półprzewodników.
6. Korzystając z testu χ^2 sprawdzić hipotezę o liniowości zależności U_H = f(B). We wnioskach ocenić stosowalność użytej metody pomiarowej (sprawdzić czy warunek słabego pola był spełniony w zakresie stosowanych w ćwiczeniu pól magnetycznych), określić źródła niepewności itd.

Pytania kontrolne.

1. Co to jest prędkość termiczna i prędkość dryfu nośników prądu?
2. Jakie czynniki mają wpływ na ruchliwość nośników?
3. Sformułować warunek równowagi sił działających na elektron w próbce, przez którą płynie prąd, w polu magnetycznym.
4. Jakie podstawowe parametry półprzewodników można wyznaczyć badając efekt Halla?

5. W jakim przypadku i dlaczego zjawisko Halla nie występuje (napięcie Halla równa się zeru)?
6. Czym różni się ruchliwość hallowska od ruchliwości dryfowej?
7. W jaki sposób można zmierzyć natężenie prądu w obwodzie elektrycznym wykorzystując hallotron?

5. Magnetoopór.

Pole magnetyczne ma jak wiemy wpływ na ruch nośników w półprzewodniku. Okazuje się, że zaburzenia, jakie wprowadza ono do tego ruchu zmieniają przewodnictwo próbki. Efekt zmiany oporu pod wpływem pola magnetycznego nazywamy magnetooporem.

W zależności od kierunku pola magnetycznego w stosunku do prądu możemy mieć do czynienia z magnetooporem podłużnym lub poprzecznym. Istnieje kilka mechanizmów, którym można przypisać występowanie tego zjawiska. Tu ograniczymy się do omówienia jednego z nich, prowadzącego do zmiany oporu próbki w poprzecznym polu magnetycznym. Mówiąc najogólniej zjawisko to wynika z rozkładu prędkości elektronów – pamiętamy, że prędkość dryfu ma charakter prędkości średniej. Pole Halla kompensuje dokładne działanie pola magnetycznego tylko dla nośników poruszających się z prędkością średnią. Dla pozostałych jest ono zbyt słabe albo zbyt silne i tory ich ulegają zakrzywieniu. Prowadzi to do zwiększenia liczby zderzeń na drodze między końcami próbki, a więc zwiększenia oporu.

Względną zmianę przewodności próbki w słabym poprzecznym polu magnetycznym można przedstawić następująco:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = A(\mu B)^2$$

$\Delta\sigma$ jest tu zmianą przewodnictwa próbki pod wpływem pola magnetycznego $(\Delta\sigma = \sigma(0) - \sigma(B))$, σ to przewodnictwo próbki bez pola magnetycznego, a A to stała zależna od mechanizmu rozpraszania (rzędu jedności).

Uzasadnić tę zależność można wyobrażając sobie, że nośnik pod wpływem siły związanej z istnieniem pola magnetycznego odchylił się od swego toru zgodnego z kierunkiem zewnętrznego pola elektrycznego E_x o mały kąt φ. W rezultacie w kierunku x cząstka przemieszcza się z prędkością równą:

$$v' = v\cos\varphi = v(1 - \frac{1}{2}\varphi^2)$$

(wykorzystano tu rozwinięcie funkcji $\cos\varphi$ w szereg dla argumentu bliskiego zeru).

Tangens kąta φ jest równy stosunkowi dwu sił działających na cząstkę w prostopadłych kierunkach – siły pochodzącej od zewnętrznego pola elektrycznego powodującego przesuwanie się cząstki w kierunku $\mathbf{y}$ oraz siły związanej z polem magnetycznym, która ją spycha w kierunku $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{tg\varphi} = \frac{\mathbf{Bv_D}}{\mathbf{E_x}} = \mathbf{B\mu}$$

Ponieważ dla małych kątów $\mathbf{tg\varphi} = \varphi$, możemy napisać

$$\mathbf{v' = v\left[1 - \frac{1}{2}(B\mu)^2\right]}$$

Zmiana przewodności jest związana ze zmianą efektywnej prędkości cząstki w kierunku przepływu prądu, a więc

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v - v'}}{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{B\mu})^2$$

Uśrednienie po wszystkich prędkościach zmienia nieco współczynnik stały w tym wyrażeniu. Ogólnie można zapisać

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \mathbf{A}(\mathbf{B\mu})^2$$

gdzie **A** jest stałą rzędu jedności.

Sprawdzimy doświadczalnie, czy zależność ta opisuje dobrze zjawisko magnetoporu w badanej próbce. W tym celu należy:

1. Ustawić prąd płynący przez próbkę, jak w punkcie 2 w poprzednim rozdziale.
2. Wykonać pomiary spadku napięcia na próbce w funkcji natężenia pola magnetycznego przy ustalonej wartości prądu.
3. Obliczyć względną zmianę przewodnictwa (zauważyć, że $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\mathbf{U_x(B) - U_x(0)}}{\mathbf{U_x(0)}}$)

   i wykonać wykres jej zależności od kwadratu pola magnetycznego.
4. Zaobserwować, czy wykres jest linią prostą oraz obliczyć stałą **A** na jego podstawie. Zastosować metodę najmniejszych kwadratów oraz wykorzystać wyznaczoną wcześniej wartość ruchliwości.

5a. Opracowanie wyników

1. Wykonać wykres zależności $\frac{U_x(B)-U_x(O)}{U_x(O)} = \mathrm{f}(B^2)$ oraz oszacować i nanieść na wykres niepewności pomiarowe wykreślanych wielkości.

2. Korzystając z testu χ^2 sprawdzić hipotezę o liniowości badanej zależności. Ocenić, czy dobrze opisuje ona zjawisko magnetooporu w badanej próbce.

   Do danych doświadczalnych dopasować prostą metodą najmniejszych kwadratów. Na podstawie jej współczynnika kierunkowego i wyznaczonej wcześniej ruchliwości obliczyć stałą A i jej (złożoną) niepewność standardową. Wynik zapisać z niepewnością rozszerzoną przyjmując współczynnik rozszerzenia równy 2.

		Magnetoopór	
		I = [mA]	**I= [mA]**
I_c[A] Prąd cewki	**B [T]**	**U_x [V]**	**U_x [V]**
0			
0.5			
1			
1.5			
2			
2.5			
3			
3.5			
4			
4.5			
5			
5.5			

Literatura:

1. W. Giriat, J. Raułuszkiewicz, „Hallotrony”, PWN 1961
2. R. Smith, „Półprzewodniki”, PWN 1966
3. L. V. Azaroff, „Struktura i własności ciał stałych”, WNT 1964

Warsaw University of Technology
Faculty of Physics
Physics II Laboratory - Southern Campus
Małgorzata Igalson

Exercise no 12

Determination of the microscopic properties of semiconductors based on Hall Effect

An electric current is a flow of electric charge. In metals, the charge carries are electrons. In case of semiconductors, the current flow is due to moving free electrons or holes depending on the type of the conductivity of a given sample. The current density *j* depends on the carrier concentration (*n* – for electrons, *p* – for holes) and the drift velocity v_d

$$\vec{j} = en\vec{v}_d \tag{1}$$

(*e* – elementary charge carried by single electron or hole)
Free charge carriers, similarly to gas particles, are moving with a high thermal speed v_{th} (10^5 m/s – 10^6 m/s) in a chaotic manner. When the electric field is applied, electrons gain a velocity component proportional to the electric field and, because of their negative charge, in the opposite direction to the field. Holes because of their positive charge drift in the direction of the electric field. The drift velocity v_d depends on the electrical field *E* and the mobility μ – a constant which characterizes the susceptibility of the free charged particle to the electrical field.

$$\vec{v}_d = \mu\vec{E} \quad .$$

Mobility depends on the properties of a given material, especially on its crystalline quality. Equation (1) can be rewritten as

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \quad . \tag{2}$$

Conductivity σ (the inverse of the resistivity) depends on concentration of free carriers and their mobility

$$\sigma = en\mu \quad . \tag{3}$$

The reader can easily check that equation (2) describes in fact proportionality of current to voltage (a drop of electrical potential) what is stated by a macroscopic Ohm's Law. For this reason equation (2) is known as a microscopic Ohm's Law.
In case when we have to take into account both electrons and holes, equation (3) takes a form

$$\sigma = e(n\mu_e + p\mu_h)$$

where *n* and *p* are the concentrations and μ_n and μ_h are the mobilities of electrons and holes respectively.
Typical values of the mobility in semiconductors is in the range from 10 cm^2/Vs to 1000 cm^2/Vs. For instance, when voltage of 10 V is applied to the sample with thickness of 1 mm, the resulting drift velocity v_d will not be greater than 10^3 m/s. This is relatively low value when compared to the thermal velocity v_{th} (10^5 – 10^6 m/s). Therefore one can imagine that free charge carriers in the semiconductor move in random directions and simultaneously drift slowly in the direction defined by the applied electrical field. Thus mobility which characterizes how fast an electron or a hole can move through the material depends on the nature and amount of obstacles on its way. Such obstacles are known as scattering centers. The scattering centers are defects of the lattice such as atom vacancies, interstitial atoms, impurities, lattice mismatch etc, but also phonons. Electrons, while traveling through the material, collide with these defects and therefore are scattered.
Depending on temperature, type of defects, intentional or nonintentional doping with foreign atoms, one type of scattering can dominate over other ones. For example, at a high temperature in a low doped material, carriers are scattered mostly by lattice vibration i.e. phonons. On the other hand, at low temperatures, scattering on structural defect prevails.

Depending on dominating scattering mechanism, the mobility can change with temperature in a different way. For example, at high temperatures, when charge carriers are scattered mostly by lattice vibration, the mobility changes with the temperature as follows

$$\mu \sim T^{-\frac{3}{2}} \quad .$$

At low temperatures when electrons and/or holes are scattered by ionized impurities mobility depends on the temperature as:

$$\mu \sim T^{\frac{3}{2}} .$$

Hall Effect

Microscopic parameters which determine conductivity are: concentration and type of charge carriers and their mobilities. One of the most common method to determine their values is measurement of the Hall effect on a given material.

If an electric current flows through a sample of semiconductor or metal and the sample is put in the magnetic field transversal to the direction of the current, the difference of electrical potential U_H appears between the sides of the sample. This potential drop is called Hall voltage and it is proportional to the magnetic field B, current I, and a constant R_H known as a Hall constant and inversely proportional to the thickness of the sample d:

$$U_H = \frac{R_H I B}{d} \quad . \tag{4}$$

To explain this phenomenon, let's consider a sample of a semiconductor where charge carriers are electrons only. When just the electrical field is applied, carriers drift along the axis x in the direction forced by this field. When the magnetic field B is additionally applied along the z axis, (see Figure 1), the Lorenz force acts on electrons.

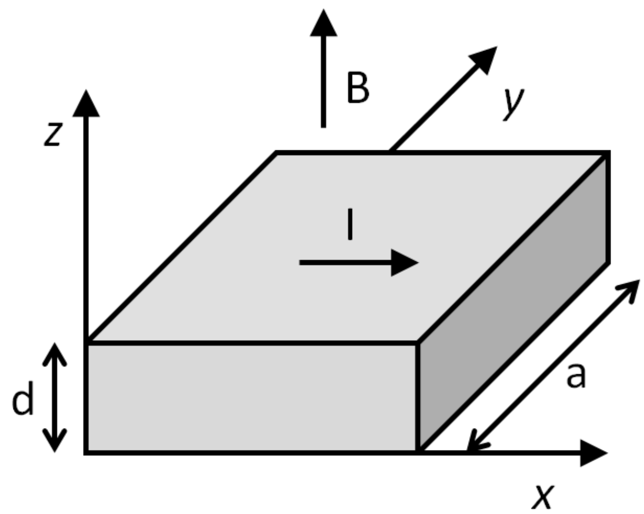


Figure 1.

Lorentz force acts along axis y and deflects the electrons' path

$$\vec{F}_y = e\vec{v}_d \times \vec{B} \quad .$$

As a result, on one side of the sample, the concentration of electrons is increased. The deficit of the negative charge on the other side exposes non-compensated positively charged ions. In consequence, an internal electric field E_H is established and it prevents further migration of electrons toward one side of the sample. In the new equilibrium state, forces associated with the electrical and the magnetic fields balance each other:

$$e\vec{v}_d \times \vec{B} = e\vec{E}_H \quad . \tag{5}$$

Because v_d is transversal to B, equation (5) can be rewritten to

$$v_d B = E_H \quad , \tag{6}$$

where E_H is directed along axis y.

Basing on the condition of balanced forces expressed by equation (6), we can directly calculate a difference of the electrical potentials U_H between two opposite sides of the sample:

$$U_H = E_H a = v_d B a \ .$$

Let us express drift velocity v_d by the current flowing through the sample

$$v_d = \frac{j}{en} = \frac{I}{enad} \ ,$$

(j – current density, elemental charge, n – concentration of electrons, I – total current, a and d – sample length and thickness respectively), thus

$$U_H = \frac{IB}{end} \ . \qquad (7)$$

Comparing the equations (7) and (4), we can express the Hall constant R_H from the Equation (4) as

$$R_H = \frac{1}{en} \ . \qquad (8)$$

In the reasoning above we have assumed that the velocity of all carriers is the same. This is true for electrons in metals. In case of semiconductors, the calculation which takes in to account the velocity distribution gives

$$R_H = \frac{r}{en} \ , \qquad (8)$$

where r is a constant which varies between 1 and 2 depending on the exact scattering mechanism. For example, when the scattering on phonons dominates $r = 3\pi/8$. When carries are scattered by ionized impurities $r = 1{,}93$.

Equations above are valid only when the magnetic field B is weak. In other words they are valid when

$$\mu B \ll 1 \ .$$

Equation (8) applies to the case when one type of carriers (e.g. electrons) dominates in the charge transport. When both electrons and holes are involved in electric current flow, expression 8 takes form

$$R_H = \frac{n\mu_e^2 - p\mu_h^2}{e(n\mu_e - p\mu_h)^2} \ . \qquad (9)$$

From the numerator of the equation (9) it is clear that presence of electrons and holes reduce Hall effect. Especially when $n\mu_e^2 = p\mu_h^2$ the effect is not observed. It becomes obvious since we remember the fact that the Lorentz force acts on electrons and holes, due to their contrary charges, in opposite directions. Thus vectors of the internal electrical field associated with both type of carriers cancel each other.

Application of the Hall Effect

The measurement of the Hall effect brings very important information about properties of the material. Some of this information cannot be extracted from the data obtained by using other electrical methods e.g. conductivity measurements. For instance, the sign of the Hall voltage gives an information whether majority carriers are electrons or holes. From the Hall constants R_H, it is possible to calculate concentration of carriers (with the accuracy depending on our knowledge of the r constant – scattering mechanism).

$$n = \frac{1}{eR_H} \ .$$

If we also measure the conductivity we can calculate the mobility of carriers

$$\mu_H = \frac{\sigma}{en} = \sigma R_H \ .$$

The mobility μ_H derived from Hall effect measurements is known as Hall mobility and it is linked to free carrier mobility by an r constant

$$\mu_H = r\mu \ .$$

Measurements of both: conductivity and the Hall voltage as a function of temperature provide temperature dependence of both concentration and mobility of carriers. From the temperature dependence of the free carrier concnetration we can conclude on doping levels in

the material. The temperature dependence of the mobility allows to draw conclusions on dominating scattering mechanism.
Hall effect is employed in devices known as hallotrons fabricated usually on high mobility semiconductors. They serve as sensors of the magnetic field, also are used to detect magnetic field in the vicinity a conductor and hence to measure high currents without using amperometers put into the circuit. They are also a part of compasses detecting the terrestrial magnetic field with high precision.

Tasks to be completed

1. Connect the setup according to the scheme on Figure 2.
2. Set the current I_1 flowing through the sample S of 1.5 mA. The power supply should operate in the current stabilization mode in order to avoid magnotoresistance effect. Measure the transverse voltage without any external magnetic field. Consider possible reasons of the observed voltage drop.

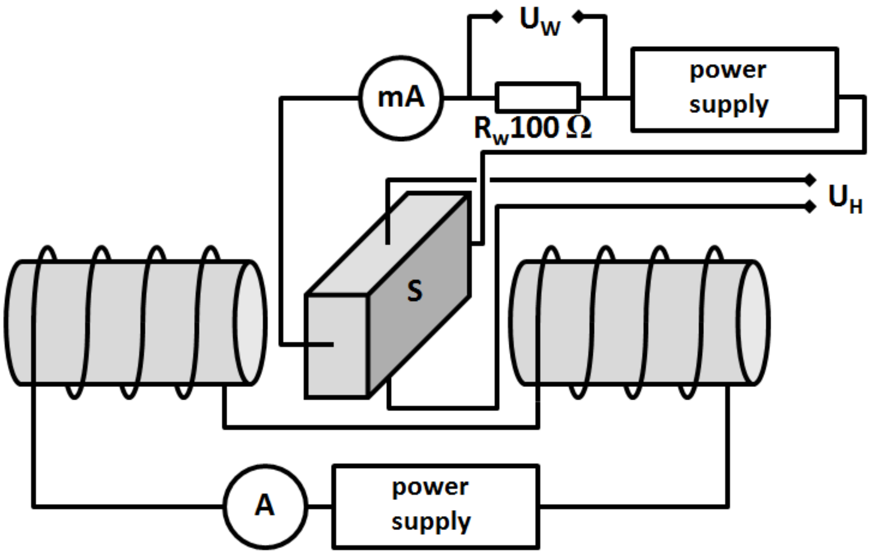


Figure 2.

		Hall voltage	
		I_1 = mA	**I_2 = mA**
I[A] Inductor current	**B [T]**	**U_H [V]**	**U_H [V]**
0.0			
0.5			
1.0			
1.5			
2.0			
2.5			
3.0			

3.5			
4.0			
4.5			
5.0			
5.5			

3. Measure the Hall voltage U_H as a function of external magnetic field (use a table of magnetic field and current dependence). During the measurement take into account asymmetry of the voltage.
Repeat tasks 2 and 3 above with the current I_2 of 3 mA.
4. Calculate resistance of the sample by measuring the voltage drop U_x between electrodes on the sample and the voltage drop on the reference resistor U_w. Because both sample and the resistor are connected in series the voltage drop U_x can be calculated from the relation

$$\frac{U_x}{R_x} = \frac{U_W}{R_W}.$$

Calculate conductivity of the sample.
5. Plot a graph of the dependence of a Hall voltage on the magnetic field and calculate the Hall constant R_H by using the Least Squares method for both characteristic measured under current of 1.5 mA and 3 mA. Estimate the error of R_H and verify whether results of the calculations for both values of the current agree within the experimental error.
6. By using of the calculated Hall constant and the measured conductivity calculate concentration and mobility of free carriers. Assume that carriers are scattered mainly by phonons.
7. Estimate errors of σ and μ. Use of a logarithmic derivative is recommended.
8. Verify if the condition of "weak field" is fulfilled for the performed measurements.

Review questions
1. What is the thermal velocity and the drift velocity?
2. What can limit and/or influence the mobility of the free carriers?
3. Formulate the condition for equilibrium of the forces acting on the electrons which flow through the sample which is kept under external magnetic field.
4. What basic properties of semiconductor can be inferred from Hall measurements?
5. Describe the condition where the Hall effect can't be observed i.e. the Hall voltage equals to zero.
6. What is the difference between Hall mobility and drift mobility?
6. Describe how electrical current by using a hallotron can be measured.

Magnetoresistance
Magnetic field influences a flow of electrons in a semiconductor and thus disturbs its conductivity. The change of the conductivity under magnetic field is known as magnetoresistance. Depending on the direction of the magnetic field either transversal magnetoresistance effect or longitude magnetoresistance effect can be observed. Although there can be several reasons which contribute to these effects, here we limit our considerations to the case where resistivity of the sample is increased just by transversal magnetic field. Keeping in mind that in fact a drift velocity have a meaning of an average velocity, the Hall voltage compensates effect of Lorentz's force only for electrons with the velocity close to this average value. For electrons with velocity much lower or much higher than the average one, the condition of balanced force is not fulfilled and their paths are deflected. This leads to the incased scattering of these electrons and therefore to the increased resistivity. Relative change of the conductivity under weak magnetic field can be expressed as follows:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = A(\mu B)^2 \quad , \tag{10}$$

where $\Delta\sigma$ is a change of the conductivity of a sample under magnetic field *($\Delta\sigma = \sigma(0) - \sigma(B)$)* and A is a constant (1<A<2) which represents scattering mechanism. The Equation 10 is derived using following reasoning. Let us consider free electron in semiconductor which moves in the direction forced by the electrical field along axis E_X. Under external magnetic field B its path will be deflected from its original direction by an angle φ. As a result a velocity component in the x-direction can be expressed as

$$v' = v\,cos(\varphi) = v\,\left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2\right) \tag{11}$$

(the cosine function was expanded in polynomial series for angles close to zero).
The tangent function of the angle φ can be expressed as a ratio of transversal forces which acts on the electron: the force of associated with electrical field which pushes an electron in y-direction and the force associated with the magnetic field which acts on an electron in z-direction

$$tg(\varphi) = \frac{Bv_D}{E_X} = B\mu\ .$$

Because of the fact that for small angle tangent function can be approximated by the value of its argument (the angle) i.e. $tg(\varphi) \approx \varphi$, the Equation (11) can be expressed as

$$v' = \left[1 - \frac{1}{2}(B\mu)^2\right] \quad .$$

Now, the relative change of the conductivity can be associated with the velocity

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{v - v'}{v} = \frac{1}{2}(\mu B)^2 \quad .$$

The averaging over velocities modifies the constant in the expression above. As a result the final expression can be written in a form of the Equation (10).

Tasks to be completed

To verify whether the Equation (10) is valid in case of investigated sample, do the following tasks:

1. Set the bias current to I_1 1.5 mA.
2. Measure voltage drop on the investigated sample as a function of the external magnetic field.

Repeat tasks 1 and 2 above with the current I_2 of 3 mA.

3. Calculate the relative change of the conductivity. Note that $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{U_X(B) - U_X(B)}{U_X(0)}$.

Prepare a graph of the relative change of σ versus B^2.. Verify whether the plot is linear. By means of the Least Squares method calculate constant A. Use calculated previously value of the mobility.

		Magnetoresistance	
		I_1 = mA	I_2 = mA
I[A] Inductor current	B [T]	U_H [V]	U_H [V]
0.0			
0.5			
1.0			
1.5			

2.0			
2.5			
3.0			
3.5			
4.0			
4.5			
5.0			
5.5			

Additional literature

1. W. Giriat, J. Raułuszkiewicz, „Hallotrony”, PWN 1961,
2. R. Smith, „Półprzewodniki”, PWN 1966,
3. L. V. Azaroff, „Struktura i własności ciał stałych”, WNT 1964.